Wie kann man Risiko messen?

Karl Mosler

Universität zu Köln

Symposium DAGStat & BfR:
Was bedroht unser Leben wirklich?
Statistische Bewertung von Gesundheitsrisiken

Berlin, 19. April 2013

Contents

Die Luft ist voller Risiken!

H7N9 ?

Was ist eigentlich Risiko?

“Definition”:

Risiko ist ein drohender, aber nicht sicherer Schaden.

Risiko besteht aus zweierlei:

- einer Schadenshöhe,
- einer Wahrscheinlichkeit, dass dieser Schaden eintritt.

Ggf. besteht das Risiko aus

- mehreren möglichen Schäden,
- entsprechenden Eintrittswahrscheinlichkeiten.

Begriff und Messung **a priori**!

Fünf Schlüsselfragen

1. Wen betrifft das Risiko?
2. Was für mögliche Schadensereignisse werden betrachtet?
3. Wie hoch sind die Schäden zu bewerten?
4. Mit welcher Wahrscheinlichkeit treten die Schäden auf?
5. Welcher Maßstab? Wie sind Schadenswerte und -wahrscheinlichkeiten zu einem Risikomaß zu verknüpfen?

Die ersten vier Fragen betreffen die Bestimmung des **Risikosachverhalts**, die fünfte seine **Messung** im engeren Sinn.

Aber: Jede der Fragen ist nichttrivial und ihre Beantwortung erfordert spezielle Annahmen und Modellierungen!

Wen betrifft das Risiko?

- Beispiel 1: Brustkrebsrisiko einer 64-jährigen Frau.
  Wahrscheinlichkeit = 8,1 %, d.h. 81 in 1000.
- Beispiel 2: Brustkrebsrisiko einer 64-jährigen Frau mit bestimmten fünf Risikofaktoren.
  Nach Gail-Modell: Wahrscheinlichkeit = 11,1 %, d.h. 111 in 1000.

Hier: Nur ein mögliches Schadensereignis, wiederholt beobachtbar. Die Risikopopulation wird durch Kovariate eingegrenzt, und das Risiko durch die Häufigkeit in der Population gemessen ("objektive" Wahrscheinlichkeit als Risikomaß).

Problem 1: Inwiefern betrifft das eine konkrete Person?

- Beispiel 3: Tod innerhalb des nächsten Jahres.
  Wahrscheinlichkeit laut Periodensterbetafel.
  `‘‘Anmerkung:  Bei Beamten sind die Werte günstiger.’’`

Welche Ereignisse, wie sie bewerten?

- Beispiel 4: Risiko einer Tamoxifen-Therapie.
  Tod nach x Jahren, Nebenwirkungen A, B, C,. . . .

Problem 2: Wie macht man die unterschiedlichen möglichen Schäden kommensurabel?
Mit welchem *Numéraire*?
(Euro, Menschenleben, entgangene Lebensjahre, . . .)?
Problem 3: Sind alle relevanten Ereignisse erfasst?

- Beispiel 5: Beim Bau des Kernreaktors Fukushima wurde eine mehr als 5,70 Meter hohe Tsunami-Welle nicht in Betracht gezogen (aktuelle Höhe 13 bis 15 Meter).

Welche Wahrscheinlichkeiten?

Wenn das Schadensereignis in gleicher Weise wiederholt beobachtet werden kann, lässt sich seine Wahrscheinlichkeit durch die relative Häufigkeit des Schadens als “objektive” Wahrscheinlichkeit schätzen. Klinische Studien, Bevölkerungsstatistik, Experimente, ...

“Objektive” Wahrscheinlichkeiten: durch Symmetrie- und andere Modellüberlegungen, Ableitung aus anderen Wahrscheinlichkeiten, Kausalmodelle (plus Empirie, ggf. Simulationsrechnung).

Subjektive Wahrscheinlichkeiten: durch Experten, Betroffene ...,

Bayes-Ansätze: auch sequentiell (vgl. Erfahrungstarifierung in der Versicherung).

Welche Wahrscheinlichkeiten?

Problem 4: Die meisten Individuuen sind nicht in der Lage, kleine Wahrscheinlichkeiten intuitiv zu erfassen, überschätzen sie in der Regel. Das gilt auch, wenn "objektive" Wahrscheinlichkeiten aus Beobachtungen verfügbar sind.

- Beispiel 7 (Versicherung eines seltenen Schadens): Ein *Ipad* zum Neupreis von 500 Euro wird auf drei Jahre gegen Glasbruch versichert; Prämie 100 Euro.
- Beispiel 8 (Gebäudeversicherung):
  `Klausel Fahrzeuganprall In Erweiterung von Abschnitt A § 2 Nr. 1 VGB leistet der Versicherer Entschädigung für versicherte Sachen, die durch Anprall eines sonstigen Fahrzeuge, seiner Teile oder seiner Ladung zerstört oder beschädigt werden oder infolge eines solchen Ereignisses abhanden kommen.`

Konstruktion eines Risikomaßes?

Besonders einfache Risikomasse sind

- die **Wahrscheinlichkeit eines Schadens**, falls nur eine Schadenshöhe in Betracht kommt,
  (Beispiele 1 bis 3: Brustkrebsrisiko, Sterbetafel),
- der **Erwartungswert der Schäden**, d.h. Summe der mit ihren Wahrscheinlichkeiten gewichteten Schadenshöhen.
- Beispiel 9: Beschädigung eines Gebäudes durch Elementarschäden (Feuer, Leitungswasser, Sturm). Versicherungsprämie entsprechend dem Erwartungswert des Schadens.
  Dto. bei Zusatzversicherung des Gebäudes gegen Fahrzeuganprall (!), Marderbiss (!), ...

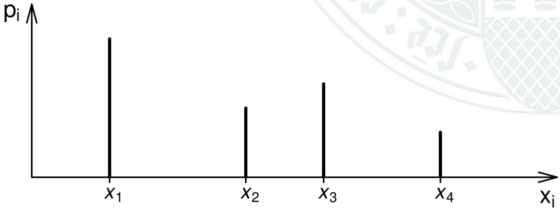
Risiko als Wahrscheinlichkeitsverteilung

Allgemein betrachtet man alle möglichen Ereignisse (nicht nur die Schadensereignisse) und die zugehörigen geordneten Schäden, in geeigneten Einheiten, ggf. negativ gemessen:

$$x_1 \leq x_2 \leq \ldots x_n .$$

Das Risiko wird dann durch die **Wahrscheinlichkeitsverteilung** der **Zufallsvariablen** X dargestellt:

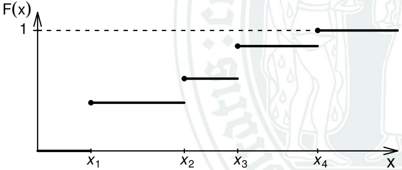
$$p_i = Pr[X = x_i] , \quad i = 1, 2, \ldots , k .$$



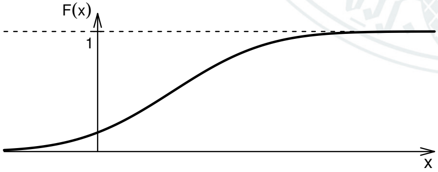
Risiko als Wahrscheinlichkeitsverteilung

Ebenso durch die Verteilungsfunktion F von X,

$$F(x) = Pr[X \leq x], \quad x \in \mathbb{R}\,.$$



Falls die möglichen Schadenshöhen stetig verteilt sind:

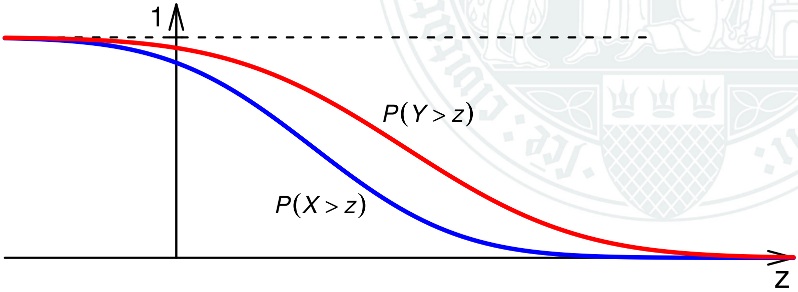


Ordinale Messung von Risiken

Y ist **gleichmäßig riskanter** als X, wenn für alle Niveaus $z \in \mathbb{R}$

$$Pr[Y > z] \geq Pr[X > z]$$

gilt (stochastische Ordnung erster Art).



Was muss ein Risikomaß leisten?

- Alternative Risiken vergleichen:
  Beispiel 4: Tamoxifen oder nicht.

  $$\text{Risiko}(A) < \text{Risiko}(B)$$

  Ordinale Messung genügt.
- Risiken aggregieren:
  Beispiele: Portefeuille von Aktien, Bilanz einer Bank, Gefahren für Menschenleben

  $$A \mapsto \text{Risiko}(A) \in \mathbb{R}$$

  Erforderlich ist eine quantitative (metrische) Risikoskala.
- Risiko transferierbar machen:
  Beispiele: Versicherungsprämie, Risikoprämie für Kredit
  Erfordert eine monetäre Risikoskala.

Quantitative Risikomaße

Ein **quantitatives Risikomaß** ist eine Funktion $F_X \mapsto g(F_X) \in \mathbb{R}$, die einer Zufallsvariablen X (genauer: ihrer Verteilung) eine reelle Zahl zuordnet. Speziell:

- Wahrscheinlichkeit eines Verlusts:
  $Pr[X > 0] = 1 - F(0) = \sum_{x_i>0} p_i$,
- Wahrscheinlichkeit des Ruins bei R:
  $Pr[X > R] = 1 - F(R) = \sum_{x_i>R} p_i$,
- Erwarteter Verlust: $\sum_{x_i>0} x_i p_i$,
- Quantilsmaße:
  - Value at Risk: $VaR_\alpha = Q_{1-\alpha}$ $\quad$ ($(1-\alpha)$-Quantil von X),
  - Expected Shortfall: $\sum_{x_i>VaR_\alpha} x_i p_i$,
- Streuungsmaße:
  Varianz von X, Standardabweichung von X,
  Quartilsabstand $Q_{0.75} - Q_{0.25}$,

Postulate für ein quantitatives Risikomaß ρ

- **Monotonie:** $\rho(Y) \geq \rho(X)$, falls Y gleichmäßig riskanter als X ist.
- **Sicherheitsreserve** c**:** $\rho(X - c) = \rho(X) - c$.
- **Diversifikation:**
  $\rho(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \leq \lambda\rho(X) + (1 - \lambda)\rho(Y)$ für $0 \leq \lambda \leq 1$.
- **Skalentreue:** $\rho(\alpha X) = \alpha\,\rho(X)$ für $\alpha > 0$.
- **Kohärenz:** = Diversifikation + Skalentreue.

Value at Risk

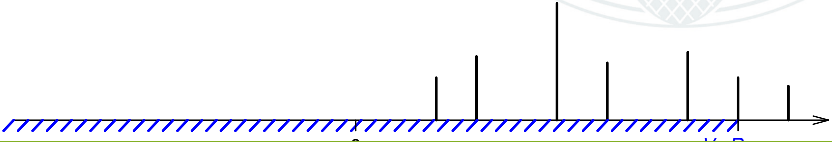
$$VaR_\alpha(X) = Q_{1-\alpha}$$

Der *Value at risk* ist der (kleinste) Wert, den X mit (mindestens) der Wahrscheinlichkeit α übersteigt. Typische Werte: $\alpha = 0.01, 0.001, \ldots$.

$VaR_\alpha(X)$ misst das Risiko in “natürlichen Einheiten”, in denen auch X gemessen wird (Euro, Zeitdauer, Menschenleben, . . .).

$VaR_\alpha(X)$ ist die kleinste Sicherheitsreserve, die benötigt wird, um die Wahrscheinlichkeit eines Verlust unterhalb α zu halten,

$$VaR_\alpha(X) = \min\{c | Pr[X - c > 0] \leq \alpha\}\,.$$



Value at Risk

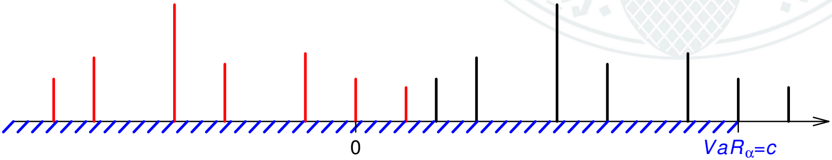
$$VaR_\alpha(X) = Q_{1-\alpha}$$

Der *Value at risk* ist der (kleinste) Wert, den X mit (mindestens) der Wahrscheinlichkeit α übersteigt. Typische Werte: $\alpha = 0.01, 0.001, \ldots$.

$VaR_\alpha(X)$ misst das Risiko in “natürlichen Einheiten”, in denen auch X gemessen wird (Euro, Zeitdauer, Menschenleben, ...).

$VaR_\alpha(X)$ ist die kleinste Sicherheitsreserve, die benötigt wird, um die Wahrscheinlichkeit eines Verlust unterhalb α zu halten,

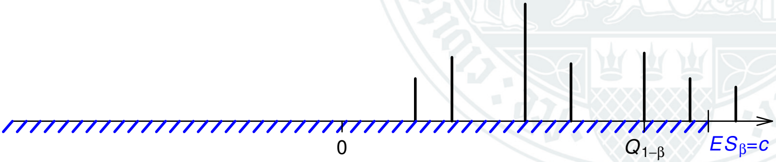
$$VaR_\alpha(X) = \min\{c | Pr[X - c > 0] \leq \alpha\}.$$



Expected Shortfall

Den Erwartungswert der Verluste jenseits des $(1-\beta)$-Quantils $Q_{1-\beta}$ bezeichnet man als **expected shortfall**, $ES_\alpha(X)$,

$$ES_\beta(X) = \frac{1}{\beta} \sum_{x_i > Q_{1-\beta}} x_i \, p_i \, .$$

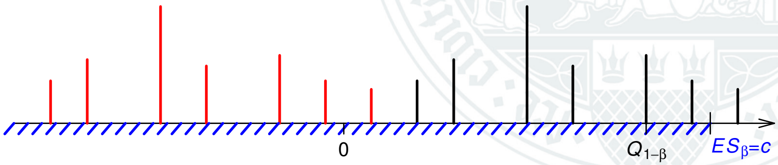


Im Unterschied zum *value at risk* ist der *expected shortfall* kohärent, sinkt also bei Diversifikation.

Expected Shortfall

Den Erwartungswert der Verluste jenseits des $(1-\beta)$-Quantils $Q_{1-\beta}$ bezeichnet man als **expected shortfall**, $ES_\alpha(X)$,

$$ES_\beta(X) = \frac{1}{\beta} \sum_{x_i > Q_{1-\beta}} x_i\, p_i\,.$$



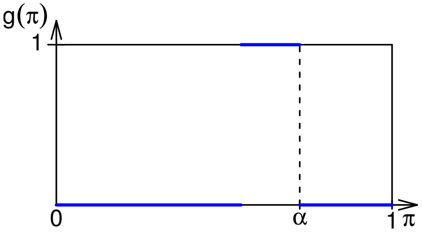
Im Unterschied zum *value at risk* ist der *expected shortfall* kohärent, sinkt also bei Diversifikation.

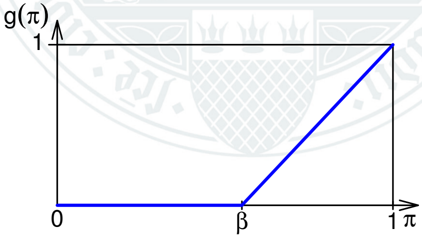
Verzerrte Wahrscheinlichkeiten

Value at risk und *expected shortfall* sind “Erwartungswerte” der Form

$$\rho(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \, q_i \, .$$

mit “verzerrten Wahrscheinlichkeiten” $q_1, q_2, \ldots, q_n$ (Quantilbasiertes Risikomaß, Verzerrungsmaß, Spektralmaß).





Allgemeine quantilbasierte Risikomaße

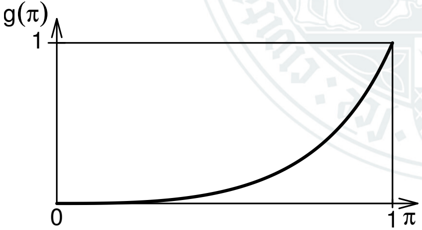
Setze $F_i = \sum_{j=1}^{i} p_i$,

$$q_i = g(F_i) - g(F_{i-1})$$

mit Verzerrungsfunktion

$$g : [0,1] \to [0,1]\,, \quad g(0) = 0\,, g(1) = 1\,.$$

ρ ist kohärent, wenn g konvex ist.

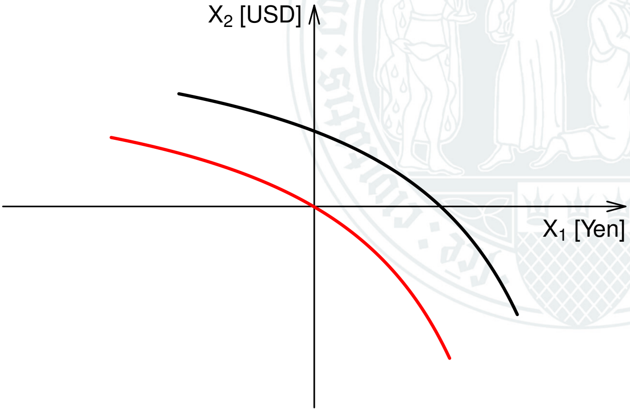


Problem: Quantilsschätzung ... !

Multivariates Risiko

Beispiel: Finanzielle Positionen in mehreren Währungen (Yen, USD).

Zweidimensionaler *expected shortfall* als Menge:



Fazit: Stellschrauben für die Risikomessung

Ein Risikomass

- enthält objektive und subjektive (evt. verzerrte) Wahrscheinlichkeiten,
- enthält Bewertungen von Ergebnissen in evt. unterschiedlichen Einheiten,
- verwendet ein spezielles Funktional zur Aggregation von Wahrscheinlichkeiten und Schadenswerten, das u.a. die Risikoeinstellung des Messenden widerspiegelt,
- ist inhaltlich auf einen bestimmten Informationsstand, empirisch auf eine (durch Kovariate definierte) Population und entsprechende Daten bezogen.

Alles dies bietet **Stellschrauben für die Risikomessung**, die in der konkreten Anwendung zu justieren sind!

Wie verständlich ist das?

Risikokommunikation und -interpretation zum Zwecke des Vergleichs, der Aggregation und des Transfers. Gut zu interpretieren und kommunizieren sind:

- einzelne Wahrscheinlichkeiten als absolute Häufigkeiten in einer Population gleichartiger Individuen oder Sachverhalte (k Krankheitsfälle bei 1000 Personen)
- mehrere Wahrscheinlichkeiten
  - im bloß ordinalen Vergleich,
  - als Differenz absoluter Häufigkeiten,
- nichtmonetäre Erwartungswerte und Quantilsmaße im bloß ordinalen Vergleich,
- monetäre Erwartungswerte als Versicherungsprämien,
- monetäre Quantilsmaße als Sicherheitsrücklagen.

Vorsichtshalber . . .

Danke für Ihre Aufmerksamkeit!